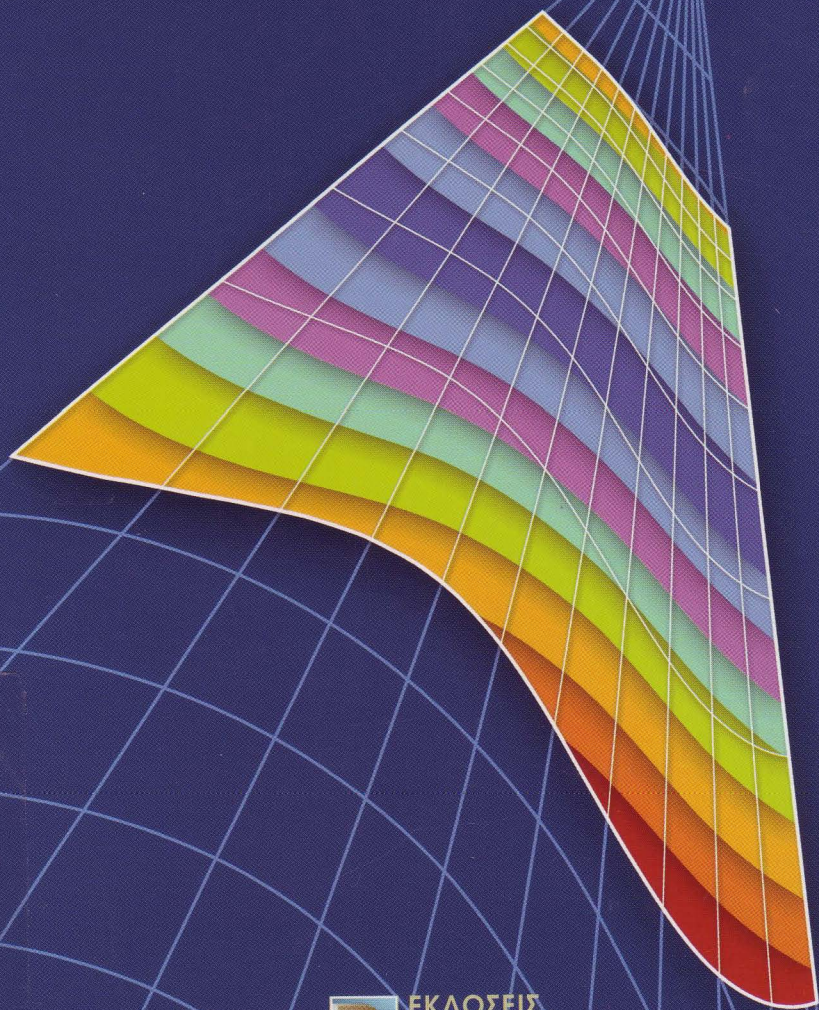


Δρ. Πασχάλης Κ. Γκότσης

# ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ  
ΖΗΤΗ

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## 1. Γενικά περί των Πεπερασμένων Στοιχείων

1.1	Εισαγωγή .....	17
1.2	Η ιστορία των πεπερασμένων στοιχείων .....	20
1.3	Σύντομη περιγραφή του βιβλίου.....	21
1.4	Η ολική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος .....	22
1.5	Η μέθοδος του Rayleigh - Ritz .....	35
1.6	Η μέθοδος του Galerkin.....	53

### Παραδείγματα

Π1.1	Ένα ελατήριο με σταθερά δύναμη $F$ .....	23
Π1.2	Τρία ελατήρια στην σειρά.....	24
Π1.3	Σύστημα ελατηρίων .....	26
Π1.4	Ράβδος με αξονικό φορτίο, αρχική παραμόρφωση και αρχική τάση (residual stress) .....	30
Π1.5	Ράβδος δικτύματος .....	32
Π1.6	Rayleigh-Ritz. Μονόπακτη ράβδος .....	37
Π1.7	Rayleigh-Ritz. Υπερστατικός φορέας.....	41
Π1.8	Rayleigh-Ritz. Πεπερασμένα στοιχεία ράβδου .....	43
Π1.9	Galerkin. Υπερστατικός φορέας .....	54
Π1.10	Galerkin. Μοντέλο του Kelvin - Voight.....	57

## 2. Η Άλγεβρα των Μητρώων και οι Βασικές Αρχές της Θεωρίας Ελαστικότητας

2.1	Η Άλγεβρα των μητρώων .....	65
2.2	Θεωρία της ελαστικότητας .....	80
2.3	Σχέση παραμόρφωσης - μετατόπισης .....	86
2.4	Σχέση τάσης - παραμόρφωσης .....	88
2.5	Αρχικές τάσεις και παραμορφώσεις. Επιρροή της θερμοκρασίας.....	92

### Παραδείγματα

Π2.1	Υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων .....	73
------	---	----



Π2.2	Γραμμικές εξισώσεις.....	78
Π2.3	Οριακές συνθήκες τάσεων και μετατοπίσεων .....	83

### 3. Προβλήματα μιας Διάστασης. Αξονικός Εφελκυσμός.

#### Ράβδος σε Στρέψη

3.1	Εισαγωγή .....	95
3.2	Στοιχείο με δύο κόμβους .....	98
3.3	Τάσεις και παραμορφώσεις .....	103
3.4	Η δυναμική ενέργεια του συστήματος.....	105
3.5	Το ολικό μητρώο δυσκαμψίας του συστήματος .....	109
3.6	Στοιχείο με τρεις κόμβους .....	120
3.7	Θερμικά φορτία και θερμικές τάσεις.....	125
3.8	Ράβδος σε στρέψη.....	140

#### Παραδείγματα

Π3.1	Συναρτήσεις μορφής και μετατοπίσεις .....	102
Π3.2	Ράβδος με μεταβλητή διατομή.....	110
Π3.3	Υπερστατικός φορέας με μηχανικό φορτίο .....	116
Π3.4	Υπερστατικός φορέας με θερμικά και μηχανικά φορτία .....	128
Π3.5	Περιστροφή ράβδου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα .....	132
Π3.6	Ράβδος συνδεδεμένη με ελατήριο.....	138
Π3.7	Υπερστατικός φορέας σε στρέψη .....	144

### 4. Δικτύωματα

4.1	Εισαγωγή .....	149
4.2	Τοπικό και καθολικό σύστημα συντεταγμένων.....	153
4.3	Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας .....	155
4.4	Υπολογισμός των τάσεων της ράβδου.....	156
4.5	Θερμικά φορτία .....	157
4.6	Εξισώσεις ισορροπίας.....	159
4.7	Δικτύωμα στον χώρο .....	160

#### Παραδείγματα

Π4.1	Υπερστατικό δικτύωμα .....	163
Π4.2	Δικτύωμα με θερμικά φορτία.....	170
Π4.3	Μετακίνηση στήριξης δικτύωματος .....	174

## 5. Δοκοί και πλαίσια

5.1	Εισαγωγή .....	181
5.2	Δυναμική ενέργεια της δοκού.....	184
5.3	Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου .....	184
5.4	Ισοδύναμα κομβικά φορτία του στοιχείου.....	191
5.5	Υπολογισμός των δυνάμεων και ροπών .....	195
5.6	Ελαστικές στηρίξεις.....	199
5.7	Πλαίσια στο επίπεδο.....	204
5.8	Υπολογισμός των αντιδράσεων .....	210

### Παραδείγματα

P5.1	Ισοστατικός φορέας .....	197
P5.2	Υπερστατικός φορέας με συνεχές φορτίο στο ένα άνοιγμα .....	210
P5.3	Υπερστατικός φορέας με ομοιόμορφο φορτίο.....	216
P5.4	Πλαίσιο .....	222
P5.5	Υπερστατικός φορέας με ελατήριο στο ελεύθερο άκρο .....	227
P5.6	Υπερστατικός φορέας με ελατήριο στο μέσον της δοκού .....	230

## 6. Προβλήματα δυο διαστάσεων. Τρίγωνο με σταθερή παραμόρφωση

6.1	Εισαγωγή .....	237
6.2	Εμβαδικές συντεταγμένες. Ισοπαραμετρικό στοιχείο .....	243
6.3	Σχέση παραμόρφωσης - μετατόπισης .....	247
6.4	Το μητρώο δυσκαμψίας του τριγωνικού στοιχείου .....	251
6.5	Υπολογισμός των ισοδύναμων κομβικών δυνάμεων.....	253
6.6	Εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής .....	262
6.7	Υπολογισμός των τάσεων στο στοιχείο 1, 2, 3.....	263

### Παραδείγματα

P6.1	Συναρτήσεις μορφής για τριγωνικό στοιχείο.....	265
P6.2	Ιακωβιανό μητρώο τριγωνικού στοιχείου.....	266
P6.3	Υπολογισμός του μητρώου παραμόρφωσης B, της επίπεδης πλάκας.....	267
P6.4	Μηχανικά φορτία και τάσεις σε πλάκα.....	268
P6.5	Θερμικές και μηχανικές τάσεις.....	273

## 7. Ισοπαραμετρικά στοιχεία δύο διαστάσεων.

### Τετράπλευρο στοιχείο και στοιχεία υψηλότερης τάξης.

#### Αριθμητική ολοκλήρωση

7.1	Εισαγωγή .....	279
7.2	Ισοπαραμετρικό τετράπλευρο στοιχείο .....	279
	Συναρτήσεις μορφής ή συναρτήσεις παρεμβολής .....	280
	Παραμόρφωση και τάση .....	285
	Δυναμική ενέργεια του σώματος .....	288
	Μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου .....	289
7.3	Διανυσματικά φορτία του στοιχείου .....	290
	Δυνάμεις βαρύτητας .....	290
	Επιφανειακές δυνάμεις .....	291
	Αρχικές τάσεις (residual stresses) .....	292
7.4	Αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο του Gauss Quadrature .....	292
	Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας .....	292
	Υπολογισμός των τάσεων και παραμορφώσεων .....	298
7.5	Στοιχεία υψηλότερης τάξης .....	301
	Τετράπλευρο στοιχείο δευτέρου βαθμού (quadratic element) .....	302
	Τριγωνικό στοιχείο δευτέρου βαθμού (quadratic triangle element) .....	305

#### Παραδείγματα

Π7.1	Υπολογισμός ολοκληρώματος μιας διάστασης .....	295
Π7.2	Υπολογισμός των τάσεων με εσωτερική ή εξωτερική παρεμβολή .....	299
Π7.3	Υπολογισμός των συναρτήσεων μορφής τετραπλεύρου στοιχείου με 8 κόμβους .....	302
Π7.4	Υπολογισμός της συναρτήσεως μορφής $N_1$ τετραπλεύρου με εννέα κόμβους .....	304
Π7.5	Υπολογισμός του $k_c$ στοιχείου με εννέα κόμβους .....	309
Π7.6	Υπολογισμός καθολικών και τοπικών συντεταγμένων .....	309
Π7.7	Υπολογισμός του $J$ , $B$ και $\sigma$ σε τετράπλευρο στοιχείο .....	311
Π7.8	Υπολογισμός ισοδύναμου κομβικού φορτίου, επιφανειακού φορτίου τετραπλεύρου στοιχείου .....	313
Π7.9	Υπολογισμός του μητρώου $B$ τετραπλεύρου στοιχείου .....	316
Π7.10	Τετράπλευρο στοιχείο φορτιζόμενο με θερμικό φορτίο .....	319
Π7.11	Οκτακομβικό στοιχείο φορτιζόμενο με επιφανειακό φορτίο .....	322
Π7.12	Υπολογισμός σύνθετης κατασκευής .....	326
Π7.13	Στοιχείο με πέντε κόμβους και διδόμενες τάσεις .....	331

## 8. Συμμετρικά εκ περιστροφής σώματα με συμμετρικά εκ περιστροφής φορτία

8.1	Εισαγωγή .....	333
8.2	Εξισώσεις ελαστικότητας .....	335
8.3	Ισοπαραμετρικό τριγωνικό στοιχείο .....	337
8.4	Μητρώο δυσκαμψίας του τριγωνικού στοιχείου .....	341
8.5	Ισοδύναμα κομβικά φορτία .....	345
8.6	Υπολογισμός τάσεων .....	352
8.7	Εφαρμογές .....	353

### Παραδείγματα

P8.1	Κύλινδρος μεγάλου μήκους με εσωτερική πίεση .....	355
P8.2	Υπολογισμός τάσεων σε κύλινδρο με εσωτερική πίεση .....	360

## 9. Στερεά στο χώρο. Ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία

9.1	Εισαγωγή .....	363
9.2	Τετράεδρο πεπερασμένο στοιχείο .....	365
9.3	Μητρώο δυσκαμψίας του πεπερασμένου στοιχείου .....	372
9.4	Πρισματικό ή εξάεδρο στοιχείο (brick element) .....	378

## 10. Η δυναμική των κατασκευών

10.1	Εισαγωγή .....	383
10.2	Δυναμικές εξισώσεις του σώματος .....	385
	Κινητική ενέργεια .....	389
	Υπολογισμός της μάζας στρεπτικού πεπερασμένου στοιχείου .....	390
10.3	Συμβιβαστό ή συνεπές μητρώων μάζας του στοιχείου (consistent mass matrix) .....	392
	Στοιχείο ράβδου μίας διάστασης .....	393
	Στοιχείο δικτυώματος .....	394
	Τριγωνικό στοιχείο για επίπεδο τάση και επίπεδο παραμόρφωση .....	395
	Τριγωνικό στοιχείο, σώματος και φορτίου συμμετρικά εκ περιστροφής .....	396
	Τετράπλευρο στοιχείο .....	397
	Στοιχείο δοκού σε κάμψη .....	398
	Στοιχείο πλαισίου .....	399

Τετραεδρικό στοιχείο .....	401
10.4 Συγκεντρωμένο η διακριτό μητρώο μάζας στοιχείου (lumped mass) ...	403
Πεπερασμένο στοιχείο ράβδου μιας διάστασης .....	403
Στοιχείο δικτύωματος .....	404
Στοιχείο δοκού.....	404
10.5 Ελεύθερη ταλάντωση.....	405
Ιδιότητες των ιδιοδιανυσμάτων (eigenvectors) .....	407

### **Παραδείγματα**

Π10.1 Αξονική ταλάντωση ελεύθερης ράβδου .....	408
Π10.2 Αξονική ταλάντωση πακτωμένης ράβδου .....	412
Π10.3 Αξονικό και συνεχές δυναμικό φορτίο .....	414
Π10.4 Ράβδος σε στρέψη.....	415
Π10.5 Δικτύωμα .....	419
Π10.6 Ελεύθερη ταλάντωση δικτύωματος .....	422
Π10.7 Ταλάντωση δοκού σε κάμψη .....	424
Π10.8 Ελεύθερη ταλάντωση μονόροφου πλαισίου.....	428
Π10.9 Ελεύθερη ταλάντωση δώροφου πλαισίου.....	431
Π10.10 Δοκός σε κάμψη συνδεδεμένος με ελατήρια και στερεό δίσκο .....	434

## **11. Προβλήματα Πεδίων. Η μέθοδος του Galerkin.**

### **Μεταφορά Θερμότητας. Στρέψη ράβδου τυχαίας διατομής**

11.1 Εισαγωγή.....	439
11.2 Μεταφορά θερμότητας .....	441
11.3 Μεταφορά θερμότητας με αγωγιμότητα, σε μια διάσταση.....	443
Πεπερασμένα στοιχεία μίας διάστασης .....	446
Συναρτησιακή μέθοδος (Functional approach).....	449
11.4 Η μέθοδος του Galerkin για τον υπολογισμό της ροής θερμότητας με αγωγιμότητα σε μια διάσταση .....	453
11.5 Ροή θερμότητας σε λεπτά πτερύγια. Πρόβλημα μιας διάστασης .....	463
11.6 Μεταφορά θερμότητας με αγωγή στο επίπεδο. Η εξίσωση της θερ- μικής διάχυσης.....	467
Τριγωνικό ισοπαραμετρικό πεπερασμένο στοιχείο .....	470
11.7 Η μέθοδος του Galerkin για τον υπολογισμό της ροής θερμότητας με αγωγιμότητα σε δύο διαστάσεις.....	473
11.8 Στρέψη σε ράβδο με αυθαίρετη διατομή .....	488

Ισοπαραμετρικό τριγωνικό στοιχείο.....	488
Η μέθοδος του Galerkin για τη λύση του προβλήματος της στρέψης.....	491
Πίνακας 11.1. Παραδείγματα στα προβλήματα πεδίων .....	440

### **Παραδείγματα**

Π11.1 Ροή θερμότητας με αγωγιμότητα σε τοίχο με διαφορετικά υλικά. Πρόβλημα μιας διάστασης.....	455
Π11.2 Ροή θερμότητας με αγωγιμότητα σε ομοιογενή πλάκα εκτιθέμενη σε θερμό αέρα. Πρόβλημα μιας διάστασης. ....	459
Π11.3 Υπολογισμός της ροής θερμότητας σε περυγίο αεροπλάνου. Πρόβλημα μιας διάστασης.....	478
Π11.4 Μεταφορά θερμότητας σε ράβδο μεγάλου μήκους και ορθογωνικής διατομής. Πρόβλημα μιας διάστασης .....	482
Π11.5 Ράβδος ορθογωνικής διατομής φορτιζόμενη με στρεπτική ροπή. Πρόβλημα δύο διαστάσεων .....	494

## **12. Προβλήματα με περιορισμούς στις οριακές συνθήκες**

12.1 Εισαγωγή .....	501
12.2 Η μέθοδος απαλοιφής.....	503
12.3 Η μέθοδος ποινής (penalty method) .....	511
12.3 Σύνθετοι περιορισμοί (multipoint constraints) .....	520

### **Παραδείγματα**

Π12.1 Μέθοδος απαλοιφής. Ράβδος με περιορισμό στην μετατόπιση.....	508
Π12.2 Μέθοδος ποινής. Ράβδος με περιορισμό στην μετατόπιση .....	516
Π12.3 Μέθοδος ποινής. Άκαμπτη άτρακτος εντός σωλήνα .....	517
Π12.4 Μέθοδος ποινής. Εύκαμπτη άτρακτος εντός σωλήνα.....	523
Π12.5 Λοξή στήριξη - κύλιση .....	526
Π12.6 Άκαμπτη ράβδος εξαρτώμενη από εύκαμπτους ράβδους.....	529

## **13. Επίπεδες πλάκες σε κάμψη**

13.1 Συμπεριφορά της πλάκας. Η θεωρία του Kirchhoff για λεπτές πλάκες.....	533
13.2 Πεπερασμένα στοιχεία για λεπτή πλάκα .....	546
13.3 Παχιές πλάκες, θεωρία του Mindlin .....	549



13.4	Ισοπαραμετρικό στοιχείο παχειάς πλάκας.....	553
13.5	Υπολογισμός των τάσεων του στοιχείου.....	558
13.6	Ισοδύναμα κομβικά φορτία του στοιχείου.....	558
13.7	Οριακές συνθήκες.....	559

### **Παραδείγματα**

Π13.1	Υπολογισμός ροπών λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής.....	543
Π13.2	Σχέση μεταξύ βέλους $w$ και $d$ .....	544

<i>Βιβλιογραφία</i> .....	561
---------------------------	-----

<i>Ενρετήριο Όρων</i> .....	565
-----------------------------	-----